
最終講義

現代の数学, トポロジー瞥見

長 崎 生 光*

京都府立医科大学大学院医学研究科生命基礎数理学(数学教室)

Modern Mathematics, A Glance at Topology

Ikumitsu Nagasaki

*Department of Mathematics and Statistics,
Kyoto Prefectural University of Medicine Graduate School of Medical Science*

抄 録

トポロジー(位相幾何学)は20世紀初頭のポアンカレの研究に始まる現代幾何学の一分野である。通常の幾何学では合同な図形を同じものとみなすが, トポロジーでは2つの図形が連続的な変形で互いに移り合うとき同じものとみなす。このとき2つの図形は同相であるという。ポアンカレはこのような図形のつながりかたが図形の本質的な性質と考えた。トポロジーとは図形の長さや面積などの計量は無視し, 図形のつながりかたを研究する分野といえる。本稿では, 幾何学を概観した後, 18世紀の数学者オイラーの先駆的な結果であるケーニヒスベルクの問題の解決やオイラーの多面体定理を紹介する。これらはともにトポロジー的発想が含まれており, 現代のトポロジーにつながる重要な成果である。次にトポロジーに基本概念である曲面のオイラー数や向き付け可能性を定義し, これらの概念を用いて, 閉曲面はそのオイラー数と向き付け可能性によって完全に分類されるという閉曲面の分類定理を紹介する。

キーワード: 幾何学, トポロジー, 閉曲面, オイラー数, 向き付け可能性。

Abstract

Topology is a branch of modern geometry that originated with the work of Poincaré in the early 20th century. In classical geometry, two figures are considered to be the same if they are congruent. However, in topology, two figures or spaces are regarded as the same if one can be continuously deformed into the other. Such figures or spaces are said to be homeomorphic. Poincaré recognized this property as fundamental to the nature of spaces.

This article begins with an overview of classical geometry. Next Euler's pioneering studies, the solution to the Königsberg bridge problem and Euler's polyhedron formula, are presented. These results contain foundational topological concepts. Subsequently, we introduce the Euler characteristic and the concept of orientability for surfaces. We then present the topological classification theorem for closed surfaces, which states that every closed surface can be uniquely classified by its Euler

令和7年5月23日受付 令和7年5月26日受理

*連絡先 長崎生光 〒602-8566 京都市上京区河原町通広小路上ル梶井町465番地

nagasaki@koto.kpu-m.ac.jp

doi:10.32206/jkpum.134.07.399

characteristic and orientability.

Key Words: Geometry, Topology, Closed surface, Euler characteristic, Orientability.

序

数学の一分野であるトポロジーはフランスの数学者ポアンカレ (1854-1912) の研究から始まったとされる。トポロジーでは2つの図形が連続的な変形で互に移り合うとき同じものみなす。このとき2つの図形は同相であるという。図形のつながりかたのみに注目しその性質を調べようというのがトポロジーといえよう。よく引き合いに出されるのは、トポロジストはコーヒーカップとドーナツが区別できないといわれる。実際、図1のようにコーヒーカップとドーナツは同相になる。

ポアンカレは最後の万能の天才ともいわれ、数学のみならず、理論物理、天体力学、科学哲学など、その業績は多岐にわたる。例えば、科学哲学では、いわゆる科学哲学3部作「科学と仮説」「科学の価値」「科学と方法」の著者でもある。トポロジー分野ではポアンカレ予想が有名であるが、この予想はトポロジー、特に3次元トポロジーの研究の原動力になった。ちなみにポアンカレ予想は2003年ロシアの数学者ペレルマンによって肯定的に解決された。それは次のような定理である。

定理. 単連結な3次元閉多様体 M は3次元球面 S^3 に同相である。

ここで単連結とは、 M 上の1次元のループ (輪) が一点に縮めることができることをいう。3次元閉多様体とは大雑把にいうと「境界のな

い滑らかな立体」のことである。3次元球面は次の式で表される3次元閉多様体である。

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1.$$

本稿では、古典的な幾何学を概観したあとで、ポアンカレ以前にトポロジー的発想で種々の問題を解決した数学者オイラーにまつわる2つの話題、ケーニヒスベルクの問題とオイラーの多面体定理を紹介する。つぎに閉曲面 (2次元閉多様体) の分類を中心にトポロジーを瞥見したい。

幾何学小史

幾何学は数学の中で最も歴史が古い分野といえよう。小中高で学ぶ幾何学は古代ギリシャの数学者ユークリッドが集大成したといわれるユークリッド幾何学にもとづく。ユークリッドはその内容を原論13巻 (和訳: ユークリッド原論¹⁾) にまとめ、後世に大きな影響を与えた。その第1巻は現在でも中学で習うピタゴラスの定理を目標に48個の命題が述べられている。いくつかの命題を紹介すると

命題1. 与えられた線分を一边とする正三角形が存在する (作図できる)。

命題32. 三角形の内角の和は 180° である。

命題47. ピタゴラスの定理が成り立つ。

命題48. ピタゴラスの定理の逆がなりたつ。

ピタゴラスの定理とは、三平方の定理ともいわれ、直角三角形の辺の長さを a, b, c , ただし c は斜辺の長さとするとき $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つというものである。この定理の証明はユーク



図1 連続的に変形してコーヒーカップをドーナツの形にできる。

リッドの証明を始めとし、数多くの証明法が知られている。驚くことに最近でも新しい証明がアメリカの2人の学生によって発見され、学会誌に発表された²⁾。ピタゴラスの定理の逆も成り立つので、辺の比が3:4:5の三角形は直角三角形になることもわかる。この事実自体はユークリッド以前から知られており、直角を正確に作るために利用された。これらは小中学校で学ぶ内容であるが、重要なことは、原論ではこれらの命題がいくつかの公理から出発し、厳密な論理によって証明されていることである。証明することによって数学という学問の正当性、普遍性が保証されているとあってよい。この証明するという精神は古代ギリシャから始まり、現代数学に連綿として受け継がれている。

このようにユークリッド幾何は完全無欠なただ一つの真理と思われていたが、ボヤイ(1802-1860)・ロバチェフスキー(1792-1856)らは非ユークリッド幾何を発見し、数学に衝撃を与えた。彼らは、ユークリッド幾何の第5公準、いわゆる平行線の公理(平行線の一意性)を否定して、ユークリッド幾何学と同等の論理性をもつ幾何学を構築したのである。ここで平行線の公理とは、与えられた直線Lと点Pがあり、Pを通りLに平行な直線がただ一つ存在するという性質である。現代では彼らの非ユークリッド幾何を双曲幾何という。この幾何学の世界では、三角形の内角の和は 180° より小さくなるし、相似な三角形は合同なものしかないことが証明される。また従来からあった球面幾何も非ユークリッド幾何と考えることができ、それを

楕円幾何という。この幾何学では、三角形の内角の和は 180° より大きくなる。現代ではこれらの幾何学は曲面上の幾何学として統一的に扱うことができる。このような観点からの幾何学として、微分幾何学あるいはリーマン幾何学があり、トポロジーと並ぶ現代幾何の中心的分野である。特にリーマン(1826-1866)に始まるリーマン幾何の考えは(リーマンは全く想定していなかったが)アインシュタイン(1879-1955)の相対性理論に応用され、重要な手法を提供した。相対性理論によれば我々の宇宙はグローバルには非ユークリッド幾何の世界である。

オイラーの数学

オイラー(1707-1783)は18世紀を代表する数学者であり、数え切れないほどの定理を発見している。執筆した論文は886編が確認されており、これらの論文は5万ページを超えるという。晩年は両目の視力を失うが、数学の研究がやむことはなかった。そのなかでトポロジーに関係する結果がいくつかあるが、ケーニヒスベルクの問題の解決とオイラーの多面体定理が有名である。

1. ケーニヒスベルクの問題

18世紀、ケーニヒスベルクはプロイセンの中心都市であった。カント(1724-1804)が生まれ育った地として有名である。ポーランドとリトアニアにはさまれバルト海に面した地域であるが、現在はロシア領になっており、カーリーニングラードと呼ばれる。当時は川に7つの橋がかかっていたという(図2)。市民の間では

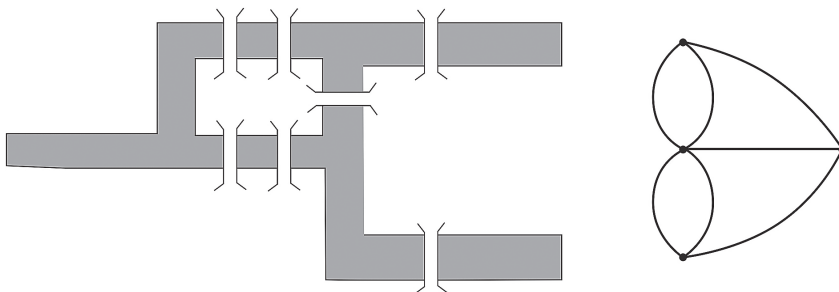


図2 ケーニヒスベルクの7つの橋(左)とそのグラフ(右)。

次のような問題が話題になっていた。

問題. 7つの橋を一回ずつ渡って、全ての橋を渡ることができるか。

この問題の完全な解答を与えたのがオイラーである。まず橋のつながり方を変形し、グラフで表した。このような変形はトポロジー的な発想である。この場合グラフの頂点（黒丸）が陸地、辺が橋を表す。このようにして問題は一筆書きの問題に帰着される。

オイラーは頂点にあつまる辺の数に注目し、偶数本の頂点を偶点、奇数本の頂点を奇点と呼んだ。結論として次の定理を証明した。

定理. グラフ（連結、ループなし）が一筆書きができるための必要十分条件は

1. すべての頂点が偶点、または
2. 2つの奇点を持ち、その他は偶点であることである。

上記のグラフは、奇点が4つあるので一筆書きはできない。つまり、橋を全て渡るルートはない。ちなみに現在のカリニングラードには8つの橋がかかっており、一筆書きができるようである。このようにオイラーの一筆書きの定理はあらゆる橋の問題に適用できる一般性（汎用性）をもっていることが重要な点である。

2. オイラーの多面体定理

次にオイラーの多面体定理を紹介しよう。この定理は高校数学でも扱われる題材であるが、現代ではこの定理を出発点としてトポロジーの理論が大きく発展している。その意味で極めて重要な定理である。各面が多角形からなる立体を多面体という。よく知られているものに正多面体がある。正四面体、正六面体（立方体）、

正八面体、正十二面体、正二十面体の5つがあるが、ここでは正多面体とは限らない一般の多面体を扱う。

オイラーは多面体について次のような量を考えた。現代ではオイラー数（オイラー標数）と呼ばれる。多面体 P のオイラー数は次の式で定義される。

$$\chi(P) = \text{頂点の数} - \text{辺の数} + \text{面の数}.$$

図3の例で計算すると、正四面体の場合は $\chi(P) = 4 - 6 + 4 = 2$ 、正六面体の場合は $\chi(P) = 8 - 12 + 6 = 2$ 、正十二面体の場合は $\chi(P) = 20 - 30 + 12 = 2$ となる。いずれも値が2になっている。これは偶然ではなく図形の位相的性質の反映である。次の定理をオイラーの多面体定理という。

定理. 凸多面体のオイラー数は2である。

ここで凸とは出っ張っていること（へこんでいないこと）を意味する。この定理の証明は他書に譲るが、凸多面体は無数にあるので上記のように一つひとつ確かめるのでは証明は終わらない。ここでも論理の力が威力を発揮し、無限の壁を越えることができるのである。

オイラー数と閉曲面の分類

凸多面体の共通の位相的性質は球面と同相であることである。したがってオイラー数は球面に対して定義されるものと考えるのが自然である。この発想を発展させて曲面のオイラー数を次のように定義する。曲面 M をいくつかの面と辺と点に分割する。ただし面は円（の内部）と同相なもの、辺は（開）線分と同相なものとする。このような分割を M のセル分割という。

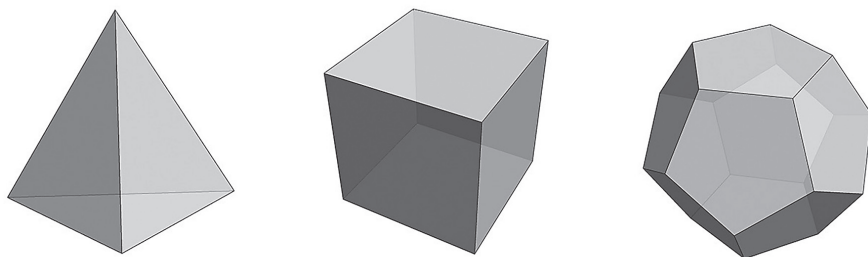


図3 左から正四面体、正六面体、正十二面体。

このとき M のオイラー数を

$$\chi(M) = \text{点の数} - \text{辺の数} + \text{面の数}$$

と定義する. セル分割の仕方は無数にあるが, オイラー数は変わらないことが証明できる. オイラー数の重要な性質は次の定理である.

定理. 2つの曲面 M, N が同相ならば $\chi(M) = \chi(N)$ である.

このように同相な関係で不変な量を位相不変量という. オイラーの多面体定理は, 球面 S^2 に同相な曲面 M のオイラー数は2であるといいかえられる. 球面のように大きさが有限(有界)で境界(縁)のない曲面を閉曲面という. 球面以外の閉曲面の例として, ドーナツの表面として現れるトーラス T^2 がある. トーラスを図4の左のようにセル分割するとそのオイラー数は $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$ となる. 球面のオイラー数と異なるのでトーラスは球面と同相でない. このようにオイラー数は同相かどうかの問題に大いに役立つ.

球面とトーラスが同相でないことは直観的にはあきらかに思えるが, オイラー数という代数的な計算で同相でないことが証明できるところが数学的に重要な点である.

さて, 閉曲面の例として球面やトーラスをあげたが, それ以外にどのようなものがあるだろうか. これがいわゆる分類問題である. トーラスには穴(ドーナツの穴)が一つある. 一般に穴が g 個ある閉曲面を M_g と表し, g を種数という. M_0 は球面 S^2 , M_1 はトーラス T^2 である. M_g を適当にセル分割をしてオイラー数を計算

すると $\chi(M_g) = 2 - 2g$ となる. g によってオイラー数が異なるので M_g は互いに同相ではないことがわかる. また g 自身も位相不変量であるがわかる. 分類問題についてはまず次の結果が証明できる.

定理. 3次元空間内に実現できる閉曲面は $M_g (g \geq 0)$ ですべてであり, 互いに同相でない.

このように3次元空間内の閉曲面は分類されるが, トポロジーでは外側の3次元空間にこだわらない. 4次元空間まで上げるとどうなるであろうか. 驚くべきことにそこには M_g とは異なる(向き付け不可能な)閉曲面 $N_g (g \geq 1)$ が存在する. ここで曲面の表裏の区別のあるときを向き付け可能といい, 表裏の区別がないときを向き付け不可能という. 向き付け可能性も位相不変な性質である. 向き付け不可能な曲面としてメビウスの帯 M^2 が有名だが, これには境界があるので閉曲面ではない. 実際, M^2 の境界は1つの円周と同相である. 一般に, 向き付け不可能な閉曲面は3次元空間では実現できない. 一方, 4次元空間では実現できることが知られている. N_g はつぎのようにして構成される. 閉曲面 M_{g-1} から円板を取り除く. そのときできる周にメビウスの帯 M^2 を周で貼り合わせる.(この貼り合わせは3次元ではできないが, 4次元では可能である.) 特に N_1 は射影平面, N_2 はクラインの壺と呼ばれている.

これらの曲面についてもセル分割からオイラー数が定義でき, $\chi(N_g) = 2 - g$ であることがわかる. したがって N_g は互いに同相でない.

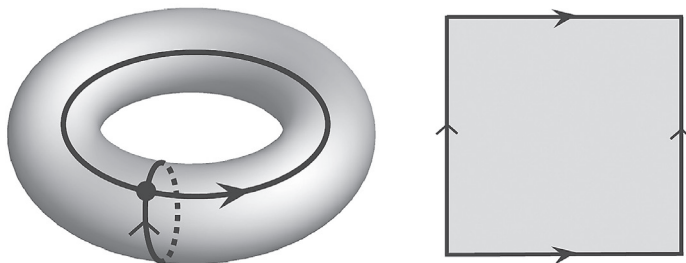


図4 トーラスのセル分割と展開図. 2つの辺で切り開くと, 右のような展開図ができる. 逆に展開図を矢印(2種ある)を方向が同じになるように貼り合わせるとトーラスができる.

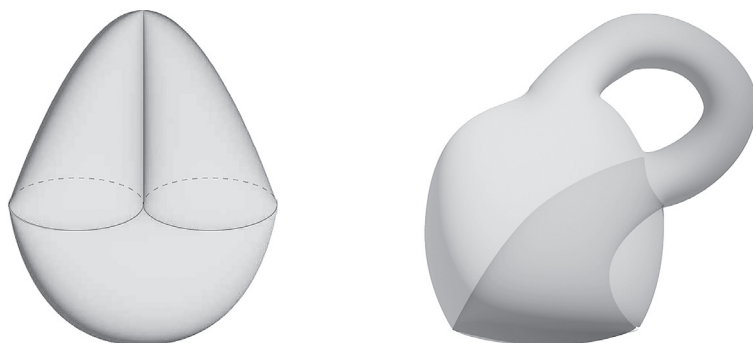


図5 射影平面（左）とクラインの壺（右）のイメージ図.

ここで M_g と比較してみると, 例えば $\chi(M_1) = \chi(N_2) = 0$ となり, オイラー数が一致する. M_1 はトーラスで向き付け可能, N_2 はクラインの壺で向き付け不可能であった. したがって M_1 と N_2 はオイラー数は等しいが, 互いに同相ではない閉曲面の例である. このようにオイラー数だけでは完全な分類はできないが, 向き付け可能性をあわせて考えると, 以下の閉曲面の分類定理が得られる. これはトポロジーの研究初期の重要な成果である.

定理. 閉曲面は M_g, N_g ですべてであり, 互いに同相でない.

特に5次元以上では, もはや新しい閉曲面は出てこない.

ポアンカレ予想再訪

序に述べた本来のポアンカレ予想は3次元閉多様体に関するものである. ここでは2次元の場合を考えてみよう. 2次元閉多様体とは前節で考察した閉曲面のことである. この場合のポアンカレ予想は「単連結な2次元閉多様体は球面 S^2 に同相である」と述べられる. 閉曲面 M が単連結とは M 上の任意のループ (輪) が M 上で変形して一点に縮めることができることをいうのであった. 単連結性も位相的性質の一つであり, トポロジーでは重要な概念である. 2次元の場合は前述のように閉曲面の分類が完成しているので閉曲面一つひとつ単連結性を確認すればよい. その結果球面以外では単連結ではないことがわかり, 2次元ポアンカレ予想は正

しいことが証明される. これを3次元閉多様体で考えたのがポアンカレである. しかし, これが驚くほどの難問であり, 多くの挑戦者を退けてきた. 2次元のように分類定理が完成していないことが大きな原因であった. むしろ3次元閉多様体の分類のための第1歩がポアンカレ予想であったといえよう. サーストン (1946-2012) は分類問題を考える上で微分幾何, 特に双曲幾何などの非ユークリッド幾何が応用できることを発見した. その業績により数学界のノーベル賞といわれるフィールズ賞を受賞したが, 分類問題に関しては, ポアンカレ予想を含む幾何化予想を提出し分類問題に道筋をつけた. そしてロシアの数学者ペレルマン (1966-) は, 画期的なアイデアでその幾何化予想 (したがってポアンカレ予想) を2003年に証明したのである. ポアンカレ予想は完全にトポロジーの問題であるが, 証明するために, 非ユークリッド幾何のような微分幾何学の手法を用いて証明されたのは興味深いことあり, 数学はいろいろな分野でつながっていると感じさせる. とまれ幾何化予想の解決で3次元閉多様体の大まかな分類が完成したといってよいであろう. ペレルマンはその業績でフィールズ賞に選出されたが, 受賞を辞退したのは当時ニュースになるほどの数学界の大事件であった.

さて, ポアンカレ予想は3次元で解かれたとなると, 次は4次元, 5次元…と考えたくなる. (これは数学者の性といえよう.) 「 n 次元閉多様体 M が $(n-1)$ 連結な n 次元閉多様ならば

M は n 次元球面に同相であろう」というのが高次元ポアンカレ予想である。(n-1) 連結の説明は省くが, 1 連結とは単連結のことである。歴史とは皮肉なもので実は高次元ポアンカレ予想は 3 次元の場合より早く解決された。その理由の一つは高次元の方が自由度が高く, 多様体を変形しやすいからである。5 次元以上のポアンカレ予想はスモール (1930-) によって 1961 年に解かれ, 4 次元ではフリードマン (1951-) によって 1982 年に解かれた。いずれも画期的な成果であり, 彼らもフィールズ賞を受賞している。

分類問題の第 1 歩がポアンカレ予想であった。このようにポアンカレ予想の解決によって分類問題はどのようなのであろうか。3 次元では幾何化予想の解決で大まかな分類ができる。4 次元もフリードマンやドナルドソン (1957-) の研究で少なくとも単連結な閉多様体の位相的分類ができています。5 次元以上の閉多様体も, ブラウダー (1934-2025), ノビコフ (1938-2024), ウォール (1936-), サリバン (1941-) らの構築した手術理論により, 大まかな分類ができていってよい。このように閉多様体の分類問題は, 2 次元のような形の分類定理とまではいえないが, 一定の結論を得たといえよう。

最後に トポロジーの展望

現代のトポロジーや幾何学では曲面を高次元化した多様体が定義され, 主要な研究対象となっている。特に 3 次元, 4 次元, さらに高次元における位相不変量などの位相的性質の研究がつづいており, ますま高度な理論に発展している。前節で述べたようにポアンカレ予想が解決され, 閉多様体の分類問題もほぼ解決した。特に 2 次元の閉曲面はトポロジー的には完全に

分類されてた。一方でその上の関数や写像のなす空間や群は無限次元であることもあり, 未解決な問題が多く, 研究の興味は尽きない。筆者は長らくボルスクーウラム型定理の研究³⁾をしているが, これも高次元球面の間の (同変) 写像を扱うものである, ボルスクーウラムの定理はもともとボルスク (1905-1982) が 1933 年に n 次元で証明したのであるが, その定理を 2 次元で述べると次のようになる。

定理. 2 次元球面 S^2 から 2 次元平面 R^2 への連続写像 $f = (f_1, f_2)$ に対して, f の値が等しくなる点のペア $x, -x$ が存在する。

ここで x は球面上の点であり, $-x$ は x と球の中心に関して対称な点 (対蹠点) を表す。この定理は次のように説明されることが多い。 S^2 は地球の表面として f の f_1 を地点 x の気温, f_2 を気圧とする。ボルスクーウラムの定理は気温と気圧がともに一致する地点 x と $-x$ が存在することを言っている。ボルスクーウラムの定理はいろいろな分野で応用が知られており, 現在も様々な一般化が研究されている。

またトポロジーの理論を応用する試みは近年特に盛んになっている。その分野を応用トポロジーあるいは計算トポロジーという。例えば, 細胞組織などの構造を多面体やグラフで表し, そのオイラー数を調べるといような試みがなされており, 生命科学等への応用が期待されている。またデータ解析に応用したものにトポロジカルデータ解析⁴⁾がある。トポロジーで開発された種々の道具を用いて新たな分析手法が考案されている。今後も理論の発展とともに, 応用面でもトポロジーという数学が世に貢献していくことを期待している。

開示すべき潜在的利益相反状態はない。

文 献

- 1) 中村幸四郎 他 (翻訳), ユークリッド原論 追補版, 共立出版, 2011.
- 2) Jackson, N, Johnson, C, Five or ten new proofs of the Pythagorean theorem, Amer. Math. Monthly, 131: 739-752, 2024.
- 3) Nagasaki, I, Determination of compact Lie groups with the Borsuk-Ulam property, Top. Appl. 319, Article 108216, 2022.
- 4) グナー・カールソン, マイケル・ヨハンソン, トポロジカルデータ解析, 森北出版, 2024.

著者プロフィール



長崎 生光 Ikumitsu Nagasaki

所属・職：京都府立医科大学生命基礎数理学・名誉教授，特任教授

略 歴：1982 年 3 月 大阪大学理学部 卒業

1984 年 3 月 大阪大学大学院理学研究科（修士）修了

1987 年 3 月 大阪大学大学院理学研究科（博士）修了

1987 年 4 月 大阪大学 助手

1994 年 4 月 大阪大学 講師

2006 年 4 月 京都府立医科大学 教授

2025 年 3 月 退職

専門分野：数学（トポロジー）

- 主な業績：1. Nagasaki I, The existence of $S^1 \times C_p$ -maps between representation spheres and its applications, *J. Fixed Point Theory Appl.* **27**: article number 25, 2025.
2. Nagasaki I. Determination of compact Lie groups with the Borsuk-Ulam property, *Top. Appl.* **319**: article number 108216, 2022.
3. Nagasaki I. Elementary abelian p -groups are the only finite groups with the Borsuk-Ulam property, *J. Fixed Point Theory Appl.* **21**: article number 16, 2019.
4. Nagasaki I, Usitaki F. New examples of the Borsuk-Ulam groups, *RIMS 講究録別冊 B39*: 109-119, 2013.
5. Nagasaki I, Usitaki F. A Hopf type classification theorem for isovariant maps from free G -manifolds to representation spheres, *Acta Math. Sin.* **27**: 685-700, 2011.